

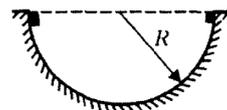
Решение олимпиады по физике «Юные таланты»

11 ноября 2017 г 10 класс

1. Вблизи шарообразной планеты радиусом 3400 км по окружности движется спутник. Найдите радиус орбиты этого спутника, если ускорение свободного падения у поверхности планеты равно $3,7 \text{ м/с}^2$, а период обращения спутника равен 3 часа.

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника, R – радиус орбиты, r – радиус планеты. Уравнение движения спутника имеет вид $mv^2 / R = GmM / R^2$, учитывая, что $g = GM / r^2$ и $T = 2\pi R / v$, получаем $R = \sqrt{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ км}$.

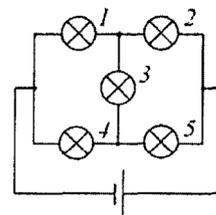
2. Две материальные точки находятся на концах горизонтального диаметра гладкой полусферы радиусом 20 см и начинают соскальзывать без трения и без начальной скорости. При столкновении тела слипаются и далее движутся как целое. Найти отношение масс тел, если после удара они поднялись на максимальную высоту 5 см по отношению к нижней точке полусферы.



Решение: Трения нет, поэтому столкновение произойдет в нижней точке полусферы, причем модуль скорости каждого из тел перед столкновением $v = \sqrt{2gR}$. Пусть массы тел до столкновения m_1 и m_2 , u – скорость составного тела после соударения. По закону сохранения импульса $m_1v - m_2v = (m_1 + m_2)u$. Из закона сохранения энергии свяжем скорость u и высоту

подъема $u = \sqrt{2gh}$, окончательно найдем соотношение масс в виде $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \sqrt{h/R}}{1 - \sqrt{h/R}} = 3$.

3. Одинаковые лампочки соединили в электрическую цепь, как показано на рисунке. Во сколько раз изменится мощность, выделяющаяся в цепи, если лампа номер 1 перегорит?



Решение: В первоначальной электрической схеме ток через лампочку 3 не течет в силу симметрии цепи, тогда общее сопротивление цепи совпадает с сопротивлением одной лампочки и равно R . После перегорания лампочки номер 1 общее сопротивление цепи увеличится и будет равно $5R/3$. Мощность, выделяющаяся в цепи, первоначально была равна $P_1 = U^2 / R$, где U – напряжение источника тока, а после перегорания лампочки будет равно $P_2 = 3U^2 / 5R$. Таким образом, после перегорания лампочки мощность уменьшится $P_1 / P_2 = 0,6$.

4. Горизонтальный поршень с малым трением, незначительной массой и теплоемкостью делит вертикальный изолированный цилиндр на две половины. Каждая половина цилиндра содержит 1 моль воздуха при нормальных температуре и давлении. К поршню подвешивают груз массой m , как показано на рисунке. Груз тянет поршень вниз и после нескольких колебаний останавливается в состоянии покоя. Во сколько раз изменится объем воздуха в нижней части цилиндра после установления равновесия? Считать массу груза очень большой.



Решение: Пусть S – площадь поперечного сечения поршня, y – вертикальное смещение между его начальным и конечным положениями равновесия. Уменьшение потенциальной энергии груза

массой m увеличивает внутреннюю энергию воздуха внутри цилиндра. Закон сохранения энергии дает

$$mgy = \frac{5}{2}(p_1 S(h-y) + p_2 S(h+y) - 2p_0 Sh),$$

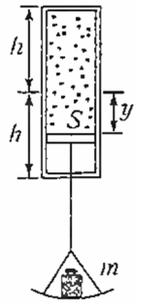
где p_1 – конечное давление в нижней части, p_2 – конечное давление в верхней части, p_0 – начальное давление воздуха в цилиндре, а внутренняя энергия воздуха, состоящего из двухатомных молекул, выражена в виде $5pV/2$. Если груз очень тяжелый, то уменьшение его потенциальной энергии (и соответствующее увеличение внутренней энергии воздуха) очень большое, и начальной внутренней энергией воздуха можно пренебречь. Таким образом,

$$mgy = \frac{5}{2}(p_1 S(h-y) + p_2 S(h+y)).$$

Когда поршень находится в покое $(p_1 - p_2)S = mg$. Температуры и массы воздуха в обеих половинах цилиндра одинаковы, поэтому их внутренние энергии тоже должны быть одинаковыми:

$$\frac{5}{2} p_1 S(h-y) = \frac{5}{2} p_2 S(h+y).$$

Из полученных уравнений находим, что смещение поршня равно $y = \sqrt{5/7}h$, т.е. газ в нижней части цилиндра сжат до $1 - \sqrt{5/7} \approx 0,15$ его первоначального объема.



Решение олимпиады по физике «Юные таланты»

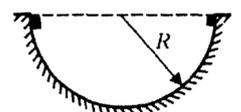
11 ноября 2017 г 11 класс

1. Вблизи шарообразной планеты радиусом 3400 км по окружности движется спутник. Найдите радиус орбиты этого спутника, если ускорение свободного падения у поверхности планеты равно $3,7 \text{ м/с}^2$, а период обращения спутника равен 3 часа.

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника, R – радиус орбиты, r – радиус планеты. Уравнение движения спутника имеет вид $mv^2 / R = GmM / R^2$,

учитывая, что $g = GM / r^2$ и $T = 2\pi R / v$, получаем $R = \sqrt{\frac{gr^2 T^2}{4\pi^2}} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ км}$.

2. Две материальные точки находятся на концах горизонтального диаметра гладкой полусферы радиусом 20 см и начинают соскальзывать без трения и без начальной скорости. При столкновении тела слипаются и далее движутся как целое. Найти отношение масс тел, если после удара они поднялись на максимальную высоту 5 см по отношению к нижней точке полусферы.



Решение: Трения нет, поэтому столкновение произойдет в нижней точке полусферы, причем модуль скорости каждого из тел перед столкновением $v = \sqrt{2gR}$. Пусть массы тел до столкновения m_1 и m_2 , u – скорость составного тела после соударения. По закону сохранения

импульса $m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u$. Из закона сохранения энергии свяжем скорость u и высоту

подъема $u = \sqrt{2gh}$, окончательно найдем соотношение масс в виде $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \sqrt{h/R}}{1 - \sqrt{h/R}} = 3$.

3. В комнате объемом 50 м^3 температура 27°C и относительная влажность 30% . Сколько времени должен работать увлажнитель, распыляющий воду со скоростью 2 кг в час, чтобы относительная влажность повысилась до 70% . Давление насыщенных паров при 27°C равно 3665 Па , молярная масса воды 18 г/моль .

Решение: Парциальное давление водяного пара при относительной влажности $\varphi_1 = 0,3$ равно $p_1 = p_H \varphi_1$, где $p_H = 3665 \text{ Па}$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона находим начальную массу

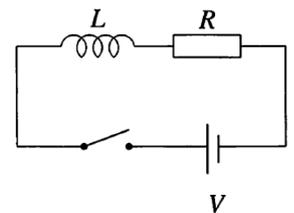
пара $p_1 V = \frac{m_1}{M} RT$, откуда $m_1 = \frac{p_H \varphi_1 V M}{RT}$. Аналогично при относительной влажности $\varphi_2 = 0,7$

масса пара в воздухе $m_2 = \frac{p_H \varphi_2 V M}{RT}$. Производительность увлажнителя составляет $\alpha = 2 \text{ кг/час}$,

для того чтобы масса водяного пара в комнате увеличилась, потребуется время

$$t = \frac{m_2 - m_1}{\alpha} = \frac{p_H (\varphi_2 - \varphi_1) M V}{\alpha RT} \approx 16 \text{ мин.}$$

4. Резистор R и катушка индуктивности L последовательно соединены с батареей V через выключатель. Сначала цепь разомкнута, а в некоторый момент ключ замыкается. Чему будет равен ток, когда магнитная энергия в катушке достигнет максимума? Когда будет наибольшей скорость нарастания джоулева тепла в резисторе?



Решение: Магнитная энергия в катушке ($W_L = LI^2 / 2$) достигнет максимального значения, когда ток в цепи будет максимальный. По закону Ома $I_{MAX} = V / R$.

Скорость увеличения магнитной энергии равна разности между мощностью батареи и мощностью рассеяния тепла в резисторе:

$$\frac{dW_L}{dt} = VI - I^2 R = -R \left(I - \frac{V}{2R} \right)^2 + \frac{V^2}{4R} \leq \frac{V^2}{4R}$$

Ясно, что скорость увеличения энергии максимальна при $I = V / 2R$.

По второму правилу Кирхгофа $V = IR + L \frac{dI}{dt}$, откуда получаем зависимость силы тока

$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L})$. Мощность, рассеянная в резисторе в виде тепла, равна

$P(t) = I^2 R = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2$. Самая большая скорость изменения энергии, как для катушки

индуктивности, так и для резистора, имеет место тогда, когда ток изменяется очень быстро. Мы определили, что это происходит при $I = V / 2R$. Подстановка этого значения в выражение для

мощности позволяет найти соответствующий момент времени: $t = \frac{L}{R} \ln 2$.